1

الارتباط و الانحدار

الوحدة (١) أولا الارتباط

١ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين

أ) الارتباط هو علاقة بين .... {متغير وثابت ، متغيرين ، متغيرين أو أكثر}

ب) يكون معامل الارتباط موجبا في حالة الارتباط .... {العكسي ، المنعدم ، الطردي}

جـ) يكون الارتباط عكسيا إذا كان معامل الارتباط ...... {موجبا ، صفر ، سالبا}

د) يكون الارتباط طرديا تاما إذا كان ر = ... {٠ ، -١ ، ١}

هـ) يكون الارتباط عكسيا تاما إذا كان ر = ... {٠ ، ١ ، -١}

و) يكون الارتباط منعدما إذا كان ر = ... {١ ، -١ ، ٠}

ز) يستخدم معامل الارتباط الخطي في حساب الارتباط للبيانات .... {الوصفية فقط ، الكمية فقط ، الكمية والوصفية معا}

ح) تستخدم طريقة سبيرمان في حساب الارتباط للبيانات .... {الكمية فقط ، الكمية والوصفية معا ، الوصفية فقط}

ط) معامل الارتباط ر ∈ .... {١ ، -١ ، ٠ ،]-١ ، ١[، [-١ ، ١]}

٢ (Egy 001) أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه إذا كان مجـ س = ٢٩ ، مجـ ص = ٥٩ ، مجـ س ص = ٢٨٢

مجـ س² = ٢٩٢ ، مجـ ص² = ٧٠١ ، ن = ٦

الحل

$$ر = \frac{ن\,مجـ س ص - مجـ س \cdot مجـ ص}{\sqrt{ن\,مجـ س^2 - (مجـ س)^2} \times \sqrt{ن\,مجـ ص^2 - (مجـ ص)^2}} = \frac{٦ \times ٢٨٢ - ٢٩ \times ٥٩}{\sqrt{٦ \times ٢٩٢ - (٢٩)^2} \times \sqrt{٦ \times ٧٠١ - (٥٩)^2}}$$

ر = -٠.٠٠٧ عكسي

٣ من بيانات الجدول الآتي احسب معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين المتغيرين س ، ص {(٥،٢) ، (٦،٥) ، (٤،٧) ، (٧،٨) ، (٩،١١) ، (٨،٧)}

س	ص	س²	ص²	س ص
٥	٢	٢٥	٤	١٠
٦	٥	٣٦	٢٥	٣٠
٤	٧	١٦	٤٩	٢٨
٧	٨	٤٩	٦٤	٥٦
٩	١١	٨١	١٢١	٩٩
٨	٧	٦٤	٤٩	٥٦
مجـ ٣٩	٤٠	٢٧١	٣١٢	٢٧٩

الحل

$$ر = \frac{ن\,مجـ س ص - مجـ س\,مجـ ص}{\sqrt{ن\,مجـ س^2 - (مجـ س)^2} \times \sqrt{ن\,مجـ ص^2 - (مجـ ص)^2}}$$

$$ر = \frac{\quad}{\sqrt{\quad} \times \sqrt{\quad}}$$

ر = ٠.٦٩ نوعه طردي

٤) (Egy 2000) الجدول الآتى يبين درجات ست طلاب فى مادتى الاحصاء والاقتصاد احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان {(ع، م) : (٩، ٧)، (٢٠، ١٥)، (١٨، ٢٠)، (١٦، ١٢)، (١٧، ١٧)، (٩، ٨)}

ع	م	رتب ع	رتب م	ف	ف²
٩	٧	١.٥	١	٠.٥	٠.٢٥
٢٠	١٥	٦	٤	٢	٤
١٨	٢٠	٥	٦	−١	١
١٦	١٢	٣	٣	٠	٠
١٧	١٧	٤	٥	−١	١
٩	٨	١.٥	٢	−٠.٥	٠.٢٥
مج				صفر	٦.٥

الحل

من الجدول مج ف² = ٦.٥

$$ر = ١ - \frac{٦ مج ف^2}{ن^3 - ن} = ١ - \frac{٦ مج ف^2}{ن(ن^2-١)}$$

$$= ١ - \frac{٦.٥ \times ٦}{٦[٣٦-١]} = ١ - \frac{٦.٥}{٣٥}$$

≃ ٠.٨١٤

٥) الجدول الآتى يبين تقديرات سبعة طلاب فى مادتى الفيزياء والرياضيات والمطلوب حساب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

الفيزياء ط	جيد	متوسط	جيد	جيد جداً	ممتاز	متوسط	ممتاز
الرياضيات س	متوسط	جيد	جيد جداً	جيد جداً	ممتاز	جيد	جيد جداً

الحل

ط	س	رتب ط	رتب س	ف	ف²
جيد	متوسط	٣.٥	١		
متوسط	جيد	١.٥	٢.٥		
جيد	جيد جداً	٣.٥	٥		
جيد جداً	جيد جداً	٥	٥		
ممتاز	ممتاز	٦.٥	٧		
متوسط	جيد	١.٥	٢.٥		
ممتاز	جيد جداً	٦.٥	٥		
					١٢

من الجدول نجد أن مج ف² = ١٢

$$ر = ١ - \frac{٦ مج ف^2}{ن^3 - ن}$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times}{}$$

$$ر = ١ - \frac{١٢}{٥٦} \simeq ٠.٧٧$$

تدريب من بيانات الجدول الآتى احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان واحسب ايضا معامل الارتباط الخطى لبيرسون وأيهما افضل فى رأيك للحصول على نتائج أدق ولماذا؟

استنتج معامل الارتباط الخطى بينهما ، [illegible]

س	٩	١٥	١٢	١٦	١٢	٧
ص	١٠	١٢	٢٠	١١	١٦	١٨

سبيرمان −٠.٩٤ عكسى
بيرسون −٠.٩٢٢ عكسى
بيرسون أدق

ثانياً الانحدار

(١) اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس

١) الارتباط بين المتغيرين س، ص يكون طردياً إذا كان الخط المستقيم يمر بأكبر عدد من النقاط التي تمثل شكل الانتشار ويكون ميله

{ موجب ، سالباً ، غير معروف ، صفر }

٢) الارتباط يكون عكسياً إذا كان الخط المستقيم يمر بأكبر عدد من النقاط ويكون ميله { سالباً ، صفر ، موجباً ، غير معروف }

٣) لتقدير قيمة ص إذا أعطيت قيمة لـ س تكون معادلة خط الانحدار

{ ص = أ س + ب ، ص = ب س + أ ، ص = س + أ } حيث أ معامل انحدار ص على س

مثال) لدراسة العلاقة بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة (س) بالطن والسعر المناظر لها (ص) بالألف جنيه في ستة فترات مختلفة كانت لدينا البيانات التالية

الكمية المطلوبة (س)	٣	٥	٧	٦	٨	١٠
السعر (ص)	٢	٤	٥	٤	٦	٨

١) أوجد معادلة خط انحدار السعر على الكمية المطلوبة

٢) تنبأ بقيمة ص بالجنيه عندما س = ٤

٣) أوجد مقدار الخطأ في السعر إذا علمت أن الكمية المطلوبة ٧ طن

الحل) سؤال لماذا لم نحسب ص² من الجدول

س	ص	س ص	س²	ص²
٣	٢	٦	٩	
٥	٤	٢٠	٢٥	
٧	٥	٣٥	٤٩	
٦	٤	٢٤	٣٦	
٨	٦	٤٨	٦٤	
١٠	٨	٨٠	١٠٠	
٣٩	٢٩	٢١٣	٢٨٣	∑

∑ س = ٣٩ ، ∑ ص = ٢٩

∑ س ص = ٢١٣ ، ∑ س² = ٢٨٣

معادلة خط انحدار ص على س هي

ص = أ س + ب ∴ لابد من إيجاد أ ، ب

$$أ = \frac{ن \sum س ص - \sum س \times \sum ص}{ن \sum س^2 - (\sum س)^2}$$

$$أ = \frac{٦ \times ٢١٣ - ٣٩ \times ٢٩}{٦ \times ٢٨٣ - (٣٩)^2} = \frac{١٤٧}{١٧٧} = ٠٫٨٣٠٥$$

$$ب = \frac{\sum ص - أ \sum س}{ن} = \frac{٢٩ - ٠٫٨٣٠٥ \times ٣٩}{٦}$$

∴ ب = −٠٫٥٦٤٩

للتنبؤ بقيمة ص : ص = أ س + ب = ٠٫٨٣٠٥ س − ٠٫٥٦٤٩

بالتعويض عن س بـ ٤ ∴ ص = ٠٫٨٣٠٥ × ٤ − ٠٫٥٦٤٩ = ٢٫٧٥٧١

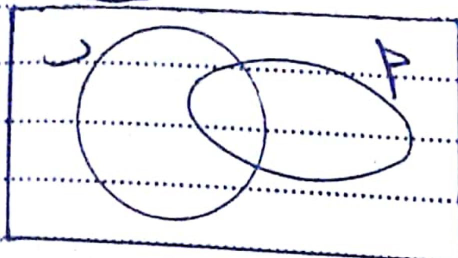
∴ قيمة ص بالجنيهات = ٢٧٥٧٫١ جنيه

مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − ص(٧) | = | ٥ − ٥٫٢٤٨٦ | = ٠٫٢٤٨٦

الاحتمال: لأي حدث أ ⊂ ف فإن احتمال وقوع أ هو ل(أ) حيث صفر ≤ ل(أ) ≤ ١

واحتمال عدم وقوع أ هو ل(أ') حيث ل(أ) + ل(أ') = ١

ومنها: * ل(أ') = ١ − ل(أ) ، ل(أ) = ١ − ل(أ')



* إذا كان أ ، ب حدثان من ف فإنه

• ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

• ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

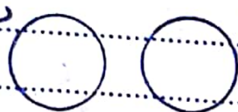
• ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) وبالمثل ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(ب ∩ أ)

الأحداث المتنافية: أ ، ب حدثان متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ∅

ويكون ل(أ ∩ ب) = صفر

، ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

ل(أ − ب) = ل(أ) ، ل(ب − أ) = ل(ب)

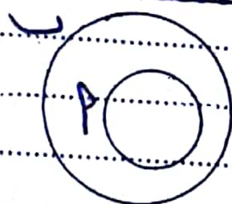


---

* إذا كان أ ⊂ ب فإن:

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) ،

ل(أ ∪ ب) = ل(ب)



ملحوظة: (و) تعني تقاطع ∩

(أو) تعني اتحاد ∪

ملحوظة: قبل البدء في الحل لازم يكون عندي

ل(أ) ، ل(ب) ، ل(أ ∩ ب) ، ل(أ ∪ ب)

قوانين للتحويل

• ل(أ ∩ بَ) = ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب)

• ل(ب ∩ أَ) = ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

• ل(أَ ∩ بَ) = ل(أ ∪ ب)َ = ١ − ل(أ ∪ ب)

• ل(أَ ∪ بَ) = ل(أ ∩ ب)َ = ١ − ل(أ ∩ ب)

• ل(أ ∪ بَ) = ل(ب − أ)َ = ١ − ل(ب − أ)

• ل(أَ ∪ ب) = ل(أ − ب)َ = ١ − ل(أ − ب)

ملاحظات

• احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل هو ل(أ ∪ ب)

• احتمال وقوع أحد الحدثين على الأكثر هو ل(أ ∩ ب)َ

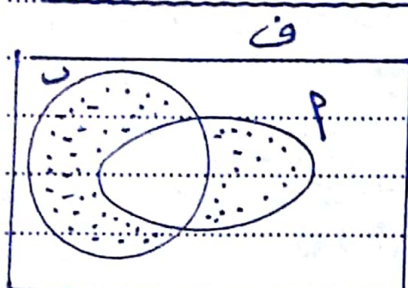
(احتمال عدم وقوعهما معاً)

• احتمال وقوع الحدثين معاً هو ل(أ ∩ ب)

• احتمال وقوع أ فقط هو ل(أ − ب) = ل(أ ∩ بَ)

• احتمال وقوع ب فقط هو ل(ب − أ) = ل(ب ∩ أَ)

• احتمال وقوع أحدهما فقط هو:



ل[(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل(أ − ب) + ل(ب − أ)

= ل(أ) + ل(ب) − ٢ل(أ ∩ ب)

أو = ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب)

الوحدة الثانية

الاحتمال الشرطي

إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان أ، ب حدثين من ف فإنه يعرف بأنه احتمال وقوع الحدث أ بشرط وقوع الحدث ب ويرمز له بالرمز ل(أ | ب)

• ل(أ | ب) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)}$ حيث ل(ب) $\neq$ صفر

• ومنها ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ | ب) $\times$ ل(ب)

• وبالمثل ل(ب | أ) = $\frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)}$ ومنها ل(أ $\cap$ ب) = ل(ب | أ) $\times$ ل(أ)

ملاحظات

• ل(أ | ب) $\neq$ ل(ب | أ)

• ل(أ' | ب) = ١ − ل(أ | ب)

• ل(ب' | أ) = ١ − ل(ب | أ)

الحدثان المستقلان

يقال لحدثين أ، ب أنهما مستقلان إذا كان:

ل(أ $\cap$ ب) = ل(أ) $\times$ ل(ب)

أي أن احتمال حدوث ب لم يؤثر على احتمال حدوث أ بمعنى أن الحدث أ لا يعتمد معلوميته أن الحدث ب قد وقع

• الحدثان المتنافيان يكونان مستقلان إذا وإذا فقط كان

ل(أ) $\times$ ل(ب) = صفر

• الأحداث غير المستقلة: يكون أ، ب حدثين غير مستقلين إذا كان

ل(أ $\cap$ ب) $\neq$ ل(أ) $\times$ ل(ب)

تمرينات

(١) حاول أن تحل رقم (١) ص ٣٤ الكتاب المدرسي

ألقي حجر نرد مرتين متتاليتين. ما احتمال ألا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولى عن ٤ إذا علمت أن الفرق المطلق بين العددين الظاهرين يساوي ٢ ؟

الحل

نفرض أن أ هو حدث ألا يزيد عدد النقاط في الرمية الأولى عن (٤)

أ = {(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (١،٤)، (١،٥)، (١،٦)،
(٢،١)، (٢،٢)، ... (٢،٤)، ... (٢،٦)
(٣،١)، (٣،٢)، ... (٣،٥)، (٣،٦)
(٤،١)، (٤،٢)، ... (٤،٦)}

نفرض أن ب هو حدث الفرق المطلق بين العددين الظاهرين ٢

ب = {(١،٣)، (٢،٤)، (٣،١)، (٣،٥)، (٤،٢)، (٤،٦)، (٥،٣)، (٦،٤)}

∴ ل(ب) = $\frac{8}{36}$

ل(أ ∩ ب) = $\frac{6}{36}$

∴ ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{6/36}{8/36} = \frac{3}{4}$

---

(٢) حاول أن تحل رقم (٢) ص ٣٥ الكتاب المدرسي

إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث

ل(أ) = ٠٫٧ ، ل(ب) = ٠٫٢٥ ، ل(أ − ب) = ٠٫٤٥ أوجد

(أ) ل(أ | ب) (ب) ل(ب | أ) (جـ) ل(أ | ب َ) (د) ل(أ َ | ...)

الحل

∵ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠٫٤٥ ∴ ل(أ ∩ ب) = ٠٫٧ − ٠٫٤٥ = ٠٫٢٥

(أ) ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(ب)}} = \frac{0.25}{0.25} = 1$

(ب) ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل(أ ∩ ب)}}{\text{ل(أ)}} = \frac{0.25}{0.7} = \frac{5}{14}$

(جـ) ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل}(أ \cap ب)}{\text{ل}(ب)} = \frac{\text{ل}(ب - أ)}{\text{ل}(ب)} = \frac{\text{ل}(ب) - \text{ل}(أ \cap ب)}{\text{ل}(ب)}$

$= \frac{٠,٢٥ - ٠,٢٥}{٠,٢٥} =$ صفر

(د) ل(أ' | ب') = $\frac{\text{ل}(أ' \cap ب')}{\text{ل}(ب')} = \frac{\text{ل}(أ \cup ب)'}{١ - \text{ل}(ب)} = \frac{١ - \text{ل}(أ \cup ب)}{١ - \text{ل}(ب)}$

حيث ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٧ + ٠,٢٥ − ٠,٢٥ = ٠,٧

∴ ل(أ' | ب') = $\frac{١ - ٠,٧}{١ - ٠,٢٥} = \frac{٠,٣}{٠,٧٥} = \frac{٢}{٥}$

حاول أن تحل رقم (٥) صـ ٣٧ بالكتاب المدرسي

(٣/١) يصوب لاعبان أ، ب في وقت واحد كرة نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب اللاعب أ الهدف = $\frac{٢}{٥}$ واحتمال أن يصيب اللاعب ب الهدف = $\frac{١}{٤}$ واحتمال أن يصيب اللاعبان الهدف معاً = $\frac{١}{٦}$ أوجد احتمال

أ) إصابة الهدف (ب) إصابة الهدف من اللاعب أ إذا تم إصابته من اللاعب ب

جـ) إصابة الهدف من اللاعب ب إذا تم إصابته من اللاعب أ

حل: ل(أ) = $\frac{٢}{٥}$ ، ل(ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

أ) احتمال إصابة الهدف هو ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

$= \frac{٢}{٥} + \frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} = \frac{٢٩}{٦٠}$

(ب) ل(أ | ب) = $\frac{\text{ل}(أ \cap ب)}{\text{ل}(ب)} = \frac{١/٦}{١/٤} = \frac{٢}{٣}$

(جـ) ل(ب | أ) = $\frac{\text{ل}(أ \cap ب)}{\text{ل}(أ)} = \frac{١/٦}{٢/٥} = \frac{٥}{١٢}$

---

(٧) اذا ألقيت قطعة نقود ثم ألقي حجر نرد معاً احتمال ظهور صورة والعدد ٣

الحل: الحادثان مستقلان لأن إلقاء قطعة النقود لا يؤثر في نواتج إلقاء حجر النرد

أ حدث ظهور الصورة ∴ ل(أ) = $\frac{1}{2}$

ب حدث ظهور العدد ٣ ∴ ل(ب) = $\frac{1}{6}$

∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

---

(٨) اذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة وكان ل(ب) = ٠,٣ ، ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ أوجد قيمة ل(أ) اذا كان أ، ب

أ) حدثين متنافيين ب) حدثين مستقلين

الحل: (أ) ∵ أ، ب متنافيان ∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) ∴ ٠,٥ = ل(أ) + ٠,٣

∴ ل(أ) = ٠,٢

(ب) أ، ب حدثين مستقلين

∵ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب)

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ٠,٣ − ٠,٥

ل(أ ∩ ب) = ل(أ) − ٠,٢ *

∵ الحدثين مستقلين ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) × ل(ب)

∴ ل(أ) − ٠,٢ = ل(أ) × ٠,٣

∴ ل(أ) − ٠,٣ ل(أ) = ٠,٢

٠,٧ ل(أ) = ٠,٢ ∴ ل(أ) = $\frac{2}{7}$

الوحدة ٣ (المتغير العشوائي) ٢٠٠٧ (أولا) (المتقطع)

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين

(٢) المتغير العشوائي يحول فضاء العينة الى عدد من ......
{ الاحداث الاولية ، الاحداث المؤكدة ، الاحداث المتنافية }

(٧) المتغير العشوائي المتقطع مداه ......
{ مجموعة غير قابلة للعد ، مجموعة خالية ، مجموعة محدودة ، جزئية من الاعداد الحقيقية }

(٨) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع يعبر عنه بـ ...... المعرفة بيان الدالة { مجموعة الازواج المرتبة ، مجموعة الاعداد الاولية ، مجال الدالة }

(٩) مجموع احتمالات الاحداث المناظرة لقيم المتغير العشوائي تساوي ......
{ ١ ، -١ ، صفر ، [٠ ، ١] }

(١٠) القيمة التي تتمركز حولها قيم المتغير العشوائي تسمى ......
{ التوقع ، التباين ، الانحراف المعياري ، معامل الاختلاف }

(١١) يحدد التباين انتشار قيم المتغير العشوائي حول ......
{ متوسطه ، انحرافه المعياري ، معامل اختلافه ، توزيعه الاحتمالي }

(٢) بين أي الدوال الآتية لا يمكن ان تحدد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س الذي مداه {٠ ، ١ ، ٢} مع ذكر السبب

(أ) $د_١(س) = \frac{س^٢ + ١}{٨}$ ، (ب) $د_٢(س) = \frac{٢س + ١}{٢}$ ، (جـ) $د_٣(س) = \frac{١}{٢(س+١)}$

الحل

(أ) ∵ $د_١(س) = \frac{٠ + ١}{٨} + \frac{١ + ١}{٨} + \frac{٤ + ١}{٨} = \frac{٨}{٨} = ١$ ∴ تحدد

(ب) ∵ $د_٢(س) = \frac{٠ + ١}{٢} + \frac{٢ + ١}{٢} + \frac{٤ + ١}{٢} = ٣ \neq ١$ ∴ لا تحدد

(جـ) ∵ $د_٣(س) = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} \neq ١$ ∴ لا تحدد

(٧) (2006 Egy) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً وكانت لديك الدالة
$د(س) = \frac{١}{١٨}(س^٢ + ك)$ حيث س ∈ {-١ ، ٠ ، ٢ ، ٣}

اولا: اوجد قيمة ك التي تجعل د(س) دالة توزيع احتمالي للمتغير س

ثانيا: احسب μ ثالثا: احسب ل(س ≤ ٢)

الحل

∵ مج د(س) = ١ ∴ $\frac{١}{١٨}(١ + ك + ك + ٤ + ك + ٩ + ك) = ١$ ∴ ك = ١

$\mu = $ مج س . د(س) $= -١\left(\frac{١+١}{١٨}\right) + صفر + ٢\left(\frac{٤+١}{١٨}\right) + ٣\left(\frac{٩+١}{١٨}\right) = \frac{١٩}{٩}$

ل(س ≤ ٢) = ل(س = ٢) + ل(س = ٠) + ل(س = -١) = ١ - ل(س = ٣) = $\frac{٤}{٩}$

5

(٤) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه {-٢، -١، ٠، ١، ٢}
وكان د(س = ر) = $\frac{أ + ر}{١٥}$ ∀ ر ∈ مدى س احسب أ ، σ

الحل

∵ مج د(س) = ١ ∴ $\frac{1}{15}$ [-٢ + أ + -١ + أ + ٠ + أ + ١ + أ + ٢ + أ] = ١

∴ ٥أ = ١٥ ∴ أ = ٣ ∴ أ = ٢

س	د(س)	س . د	س² . د
-٢	$\frac{1}{15}$	-٢/١٥	٤/١٥
-١	$\frac{2}{15}$	-٢/١٥	٢/١٥
صفر	$\frac{3}{15}$	صفر	صفر
١	$\frac{4}{15}$	٤/١٥	٤/١٥
٢	$\frac{5}{15}$	١٠/١٥	٢٠/١٥

μ = مج س . د(س)
= $\frac{10}{15}$ = $\frac{2}{3}$

σ² = مج س² . د(س) - μ²
= ٢ - $\frac{4}{9}$ = $\frac{14}{9}$

σ = $\sqrt{\frac{14}{9}}$ = $\frac{1}{3}\sqrt{14}$

(٥) س متغير عشوائي متقطع مداه {١، ٢} فإذا كان الوسط الحسابي يساوي $\frac{5}{4}$ احسب معامل الاختلاف

الحل

س	١	٢
د	أ	١-أ

μ = مج س . د(س) ∴ $\frac{5}{4}$ = أ + ٢(١ - أ)

∴ $\frac{5}{4}$ = أ + ٢ - ٢أ ∴ أ = ٢ - $\frac{5}{4}$ = $\frac{3}{4}$

∴ د(س = ١) = $\frac{3}{4}$ ، د(س = ٢) = $\frac{1}{4}$

σ² = مج س² . د(س) - μ² = ١ × $\frac{3}{4}$ + ٤ × $\frac{1}{4}$ - $(\frac{5}{4})^2$ = $\frac{3}{16}$ ∴ σ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

معامل الاختلاف = σ ÷ μ × ١٠٠ ٪ = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ÷ $\frac{5}{4}$ × ١٠٠ ٪ = $\frac{\sqrt{3}}{5}$ × ١٠٠ ٪

= ٢٠$\sqrt{3}$ ٪

(٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً توزيعه الاحتمالي كما هو مبين بالجدول (i) احسب قيمة ع
(ii) اكتب التوزيع الاحتمالي ثم احسب μ ، σ

س	-٢	٠	٢	٦
د	ع	ع²	٢ع²	ع

الحل

∵ مج د(س) = ١ ∴ ع + ع² + ٢ع² + ع = ١

∴ ٢ع² + ٢ع - ١ = صفر ∴ (٢ع - ١)(ع + ١) = صفر

∴ ع = $\frac{1}{2}$ أو ع = -١ مرفوض

س	د	س . د	س² . د
-٢	١/٢	-١	٢
٠	$\frac{1}{9}$	٠	٠
٣	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	٢
٦	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{2}$	١٢

μ = مج س . د(س) = $\frac{5}{2}$

σ² = مج س² . د(س) - μ² = ١٧ - $(\frac{5}{2})^2$ = $\frac{128}{9}$

σ = $\sqrt{σ^2}$ = ٨$\sqrt{2}$ / ٣

Egy004

٧ س متغير عشوائي متقطع بحيث

$ل(س = صفر) = ل(س = ٢) = م$ ، $ل(س = ١) = ١ - ٢م$

حيث $٠ < م < \frac{1}{2}$

اولا : اثبت ان هذه الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س

ثانيا : احسب المتوسط والتباين للمتغير س.

ثالثا : احسب قيمة م التى تجعل تباين المتغير س يساوى $\frac{1}{2}$

الحل ∵ لكل س $ل(٠)$ ، $ل(١)$ ، $ل(٢)$ غير سالبة ← I

كذلك $ل(٠) + ل(١) + ل(٢) = م + ١ - ٢م + م = ١$ ← II

من I ، II ∴ هذه الاحتمالات تحدد توزيعا احتماليا للمتغير س

$\mu = \sum س\, د(س) = ٠ \times م + ١ \times (١ - ٢م) + ٢ \times م = ١$

$\sigma^2 = \sum س^2 . د(س) - \mu^2$

$= صفر \times م + ١^2 \times (١ - ٢م) + ٤ \times (٢) - (١)^2 = ٢م$

∴ $(\mu = ١)$ ، $(\sigma^2 = ٢م)$ وعندما $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ ∴ $(م = \frac{1}{4})$

٨ صندوق به كرات حمراء وبيضاء عددها متساوٍ. سحبت منه كرتان الواحدة بعد الاخرى مع اعادة الكرة المسحوبة اولا قبل السحبة الثانيه وعرف المتغير العشوائى س بأنه عدد الكرات الحمراء والمطلوب اولا: صف فضاء نواتج مناسب للتجربة

ثانيا : اكتب التوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى ثم احسب μ ، σ

الحل ف = {(ح،ح) ، (ح،ب) ، (ب،ح) ، (ب،ب)}

س	٢	١	صفر
د	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mu = \sum س . د(س)$

$= ٢ \times \frac{1}{4} + ١ \times \frac{2}{4} + ٠ \times \frac{1}{4} = ١$

$\sigma^2 = \sum س^2 . د(س) - \mu^2 = (٤ \times \frac{1}{4} + ١ \times \frac{2}{4} + ٠ \times \frac{1}{4}) - ١ = \frac{1}{2}$ ∴ $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}$

٩ إذا كان س متغيراً عشوائيا متقطعا يعبر عن عدد البنات فى أسرة لديها ثلاثه اطفال فاكتب مدى المتغير س وإذا فرضنا ان احتمال انجاب ولد يساوى احتمال انجاب بنت وعدم وجود توائم. اكتب التوزيع الاحتمالى

الجواب {(٠، $\frac{1}{8}$) ، (١، $\frac{3}{8}$) ، (٢، $\frac{3}{8}$) ، (٣، $\frac{1}{8}$)}

7

(١٠) س مجموعة الأرقام {١، ٢، ٤، ٥} ألقت المجموعة ف التي تمثل مجموعة الأعداد الزوجية المكونة من رقمين مختلفين وإذا عرف على ف متغيراً عشوائياً س يعبر عن الفرق المطلق بين رقمي العدد الزوجي والمطلوب

أولاً: أوجد كلاً من التوزيع الاحتمالي والمتوسط الحسابي للمتغير س

ثانياً: بين أن المتغير العشوائي س يحدث تجزيئاً لمجموعة ف

الحل

ف = {١٢، ٢٢، ٤٢، ٥٢، ١٤، ٤٤، ٢٤، ٥٤}

مدى المتغير س = {١، ٢، ٣}

التفسير: العنصر ١ صورة للحدث أ {١٢، ٢٢، ٢٤، ٥٤}

العنصر ٢ صورة للحدث ب {٤٢، ٤٤}

العنصر ٣ صورة للحدث جـ {٥٢، ١٤}

وواضح أن أ، ب، جـ أحداث متنافية

∴ س يحدث تجزيئاً لفضاء النواتج ف

س	١	٢	٣	مج
د	٤/٨	٢/٨	٢/٨	١

μ = مج س . د(س)

= ١ × ٤/٨ + ٢ × ٢/٨ + ٣ × ٢/٨

= ١٤/٨ = ٧/٤

(١١) حجر نرد منتظم وجهان منه يحملان الرقم (١) ووجهان يحملان الرقم (٢) ووجهان يحملان الرقم (٥). ألقي هذا الحجر مرتين متتاليتين ولوحظ الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للحجر في كل مرة فإذا كان المتغير العشوائي س هو الفرق المطلق بين الرقمين الظاهرين أوجد

(i) التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

(ii) احتمال أن يكون الفرق المطلق أكبر من ٢

الحل

س	د	س . د	س² . د
صفر	٢/٩	٠ × ٢/٩	٠ × ٢/٩
٢	٤/٩	٢ × ٤/٩	٤ × ٤/٩
٤	٢/٩	٤ × ٢/٩	١٦ × ٢/٩
مج	١	٩/١٦	٩/٤٨

μ = مج س . د(س) = ١٦/٩

σ^2 = مج س² . د(س) − μ^2 = ٤٨/٩ − (١٦/٩)²

ل(س > ٢) = ل(س = ٤) = ٤/٩

(١٢) إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي يتحدد بالدالة د(س) = $\frac{س+ك}{١٦}$ حيث س ∈ {[illegible]}
أوجد (i) ك (ii) μ ، σ^2 ، σ ، معامل الاختلاف

الحل ∵ مجـ د(س) = ١ ∴ $\frac{١}{١٦}$ [(ك−٢) + (ك+٢) + (ك+١) + (ك+٠) ...] = ١

∴ ١٧ + ك = ١٦ ∴ ك = −١

س	د	س . د	$س^2$. د
−٢			
٢			
١			
−١			
مجـ			

μ = مجـ س . د(س)
= $\frac{٥}{٨}$

σ^2 = مجـ $س^2$. د(س) − μ^2
= $\frac{٩}{٤}$ − $\left(\frac{٥}{٨}\right)^2$ = $\frac{١١٩}{٦٤}$

σ = $\frac{\sqrt{١١٩}}{٨}$

معامل الاختلاف = $\left(\frac{\sqrt{١١٩}}{٨} \times \frac{٨}{٥}\right)$ × ١٠٠%

(١٣) إذا كان الوسط الحسابي لمتغير عشوائي ٢٤ وتباينه ٤ احسب معامل الاختلاف

الحل معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\mu}$ × $\frac{١٠٠}{١٠٠}$ = $\frac{٢}{٢٤}$ × ١٠٠ % = ٨ $\frac{١}{٣}$ % = ٨.٣ %

(١٤) متغير عشوائي متقطع معامل الاختلاف له ٤٠ % وتباينه ١٦ احسب توقعه

الحل σ = ٤ ∴ ٤٠ % = $\frac{٤}{\mu}$ × ١٠٠ % ∴ μ = ١٠

(١٥) إذا كان التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س يتعين بالدالة د(س) = $\frac{١}{١٦}$ (س + أ) حيث س ∈ {−٢ ، −١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} أوجد
(i) قيمة أ (ii) ل(س ≥ ٢) (iii) معامل الاختلاف الجواب (٢) $\frac{٩}{١٦}$ [illegible]

الحل

ثانياً) الفصل (١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين فيما يلي (9)

أ) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات من أ ← ب تساوي ...... { ل(س ≥ أ) ، ل(س ≤ ب) ، ل(س = أ) ، ل(أ ≤ س ≤ ب) }

ب) منحنى دالة الكثافة يقع .... محور السينات { على ، تحت ، فوق }

ج) مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى دالة الكثافة وفوق محور السينات تساوي .... { صفر أو -١ أو (٠، ١) ، ١ }

د) إذا كان مدى دالة الكثافة لدالة هو [ج ، د] فإن ل(س = أ) = ... { ١ ، -١ ، ∋]٠، ١[، صفر }

هـ) إذا كانت دالة الكثافة دالة ثابتة أو من الدرجة الأولى فإنها تُمثل بـ .... { دائرة ، منحنى دالة تربيعية ، خط مستقيم ، قطعة مستقيمة }

٢) إذا كان س متغير عشوائي متصل مداه [٠، ٢] ودالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { صفر : س = صفر ، ½ س : ٠ < س ≤ ٢ }

أوجد (i) ل(٠ ≤ س ≤ $\frac{٣}{٢}$) (ii) ل(س > ١)

الحل

(i) ل(٠ ≤ س ≤ $\frac{٣}{٢}$)

= ½ [د($\frac{٣}{٢}$) + د(٠)] [$\frac{٣}{٢}$ − ٠]

= $\frac{٣}{٤}$ [$\frac{٣}{٤}$ + صفر] = $\frac{٩}{٤×٤}$ = $\frac{٩}{١٦}$

(ii) ل(س > ١) = ل(١ < س < ٢) = ½ [د(٢) + د(١)] × ١

= ½ [١ + ½] [٢ − ١] = ½ × $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

٢) (Egy 2005) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { $\frac{س}{٦}$: ٠ ≤ س ≤ ٢ ، $\frac{١}{٣}$: ٢ < س ≤ ٤ }

(i) احسب ل(١ ≤ س ≤ ٢)

(ii) أوجد أ التي تجعل ل(٢ < س ≤ أ) = ٠.٥

الحل

ل(١ ≤ س ≤ ٢) = ½ [د(٢) + د(١)] [٢ − ١]

= ½ [$\frac{٢}{٦}$ + $\frac{١}{٦}$] × ١ = $\frac{١}{٤}$

ل(٢ < س ≤ أ) = ½

∴ ½ [د(أ) + د(٢)] [أ − ٢] = ½

∴ ($\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٣}$)(أ − ٢) = ١ ∴ أ = $\frac{٧}{٢}$

(٤) (تجريبي [illegible]) إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له على الصورة د(س) حيث

$$د(س) = \begin{cases} (س-١) & : ١ \le س \le ٢ \\ ١ & : ٢ < س \le م \\ صفر & : خلاف ذلك \end{cases}$$

أولاً: احسب قيمة م

ثانياً: ل(س ∋ [١ ، [illegible]])

ثالثاً: ل(٣/٢ < س < ٤)

الحل

∵ د(س) تمثل دالة كثافة احتمال ∴ ل(١ ≤ س ≤ م) = ١

∴ ل(١ ≤ س ≤ ٢) + ل(٢ < س ≤ م) = ١

$\frac{1}{2}$ [د(٢) + د(١)][٢ - ١] + $\frac{1}{2}$ [د(م) + د(٢)][م - ٢] = ١

∴ د(٢) + د(١) + [د(م) + د(٢)][م - ٢] = ٢

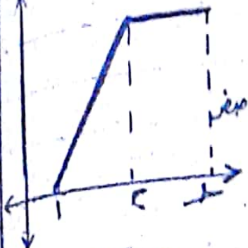
١ + صفر + (١ + ١)(م - ٢) = ٢ ∴ ٢(م - ٢) = ١

٢م - ٤ = ١ ∴ ٢م = ٥ ∴ $م = \frac{5}{2}$

ل(١ < س < $\frac{3}{2}$) = $\frac{1}{2}$ [د($\frac{3}{2}$) + د(١)][$\frac{3}{2}$ - ١] = $\frac{1}{2}$ [$\frac{1}{2}$ + ٠] × $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{8}$

ل($\frac{3}{2}$ < س < ٤) =

= ل($\frac{3}{2}$ < س < ٢) + ل(٢ < س < $\frac{5}{2}$) + ل($\frac{5}{2}$ ≤ س ≤ ٤)



= $\frac{1}{2}$ [د(٢) + د($\frac{3}{2}$)][٢ - $\frac{3}{2}$] + $\frac{1}{2}$ [د($\frac{5}{2}$) + د(٢)][$\frac{5}{2}$ - ٢] + صفر

= $\frac{7}{8}$

أو ل($\frac{3}{2}$ < س < ٤) =

= ١ - ل(١ < س < $\frac{3}{2}$) = ١ - $\frac{1}{8}$ = $\frac{7}{8}$ حل أذكى

(٥) متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي د(س) حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{1}{2} - م س & : ٠ \le س \le ٤ \\ صفر & : خلاف ذلك \end{cases}$$

(i) احسب قيمة م

(ii) احسب ك حيث ل(١ ≤ س ≤ [illegible]) = $\frac{5}{16}$

الحل

∵ د(س) دالة كثافة احتمال ∴ ل(٠ ≤ س ≤ ٤) = ١

∴ $\frac{1}{2}$ [د(٤) + د(٠)][٤ - ٠] = ١ ∴ د(٤) + د(٠) = $\frac{1}{2}$

∴ $\frac{1}{2}$ - ٤م + $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ∴ $م = \frac{1}{8}$

∵ ل(١ ≤ س ≤ ك) = $\frac{5}{16}$ ∴ $\frac{1}{2}$ [د(ك) + د(١)][ك - ١] = $\frac{5}{16}$ ⟵ $\frac{5}{8}$

∴ ($\frac{1}{2}$ - $\frac{ك}{8}$ + $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{8}$)(ك - ١) = $\frac{5}{8}$ ∴ (ك - ١)($\frac{7}{8}$ - $\frac{ك}{8}$) = $\frac{5}{8}$

∴ (ك - ١)(٧ - ك) = ٥ ∴ ٧ك - ك² + ك - ٧ = ٥

∴ ك² - ٨ك + ١٢ = صفر ∴ (ك - ٢)(ك - ٦) = ٠ ∴ ك = ٢ ، ك = ٦ مرفوض

٦ ⑪

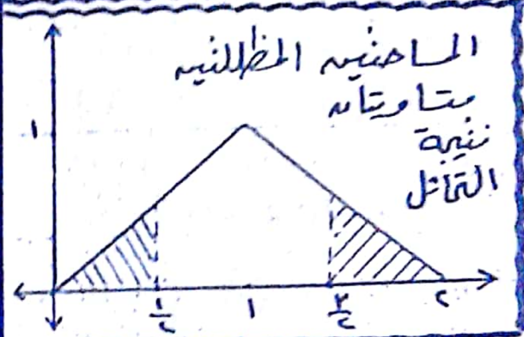
إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي

$$د(س) = \begin{cases} س & : ٠ \le س \le ١ \\ ٢ - س & : ١ < س \le ٢ \\ صفر & : فيما عدا ذلك \end{cases}$$

(i) احسب $ل(\frac{١}{٢} < س < \frac{٣}{٢})$

(ii) $ل(س < \frac{١}{٢})$

الحل



$ل(\frac{١}{٢} < س < \frac{٣}{٢})$

$= ل(\frac{١}{٢} < س < ١) + ل(١ < س < \frac{٣}{٢})$

$= \frac{١}{٢}[د(١) + د(\frac{١}{٢})][١ - \frac{١}{٢}] +$
$\frac{١}{٢}[د(\frac{٣}{٢}) + د(١)][\frac{٣}{٢} - ١]$

$= \frac{١}{٤}[د(١) + د(\frac{١}{٢}) + د(\frac{٣}{٢}) + د(١)]$

$= \frac{١}{٤}[٢ د(١) + د(\frac{١}{٢}) + د(\frac{٣}{٢})] = \frac{١}{٤}[٢ \times ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}] = \frac{٣}{٤}$

$ل(س < \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}[١ - ل(\frac{١}{٢} < س < \frac{٣}{٢})] = \frac{١}{٢}[١ - \frac{٣}{٤}] = \frac{١}{٨}$

حل آخر: $ل(س < \frac{١}{٢}) = ل(٠ < س < \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢}[د(\frac{١}{٢}) + د(٠)][\frac{١}{٢} - ٠] = \frac{١}{٨}$

٧

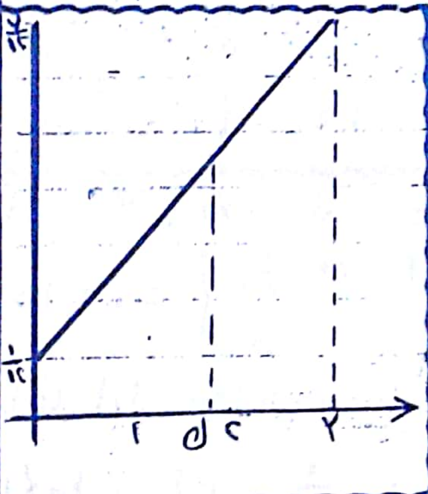
إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً حيث

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٢س + ١}{١٢} & : ٠ \le س \le ٣ \\ صفر & : فيما عدا ذلك \end{cases}$$

(i) اثبت ان د دالة كثافة احتمال للمتغير س

(ii) اوجد قيمة ك التي تجعل $ل(س > ك) = ل(س < ك)$

الحل



$ل(٠ \le س \le ٣) = \frac{١}{٢}[د(٣) + د(٠)][٣ - ٠]$

$= \frac{١}{٢}[\frac{٧}{١٢} + \frac{١}{١٢}] \times ٣ = \frac{١}{٢} \times \frac{٨}{١٢} \times ٣ = ١$

∵ المنحنى يقع بأكمله فوق محور السينات

∴ الدالة تمثل دالة كثافة احتمال

∵ $ل(س > ك) = ل(س < ك)$

∴ $٢ ل(س < ك) = ١$ ∴ $ل(س < ك) = \frac{١}{٢}$

∴ $\frac{١}{٢} = ل(٠ < س < ك)$

∴ $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}[د(ك) + د(٠)][ك - ٠]$ ∴ $(\frac{٢ك + ١}{١٢} + \frac{١}{١٢}) \times ك = ١$

∴ $\frac{ك + ١}{٦} \times ك = ١$ ∴ $ك^٢ + ك - ٦ = ٠$ ∴ $(ك - ٢)(ك + ٣) = ٠$ ∴ $ك = ٢$

(٨) س متغير عشوائي متصل مداه [١، ٩] ودالة كثافة الاحتمال له

د(س) = { ك(٤ − س) : س ∈ [١، ٣]
          ك : س ∈]٣، ٩]

احسب ما أمكنك كلاً من (i) ل(س < ٢) (ii) ل(|س−١| ≤ ٢) (iii) ل(|س−١| > ٢) (iv) ل(|س| > ٩)

الحل

∵ مدى المتغير العشوائي هو [١، ٩] ∴ ل(١ ≤ س ≤ ٩) = ١

∴ ل(١ ≤ س ≤ ٣) + ل(٣ < س ≤ ٩) = ١

∴ ½[د(٣) + د(١)][٣ − ١] + ½[د(٩) + د(٣)][٩ − ٣] = ١

د(٣) + د(١) + ٣د(٩) + ٣د(٣) = ١

∴ ك + ٣ك + ٣ك + ٣ك = ١ ∴ ١٠ك = ١ ∴ ك = ١/١٠

د(س) = { (٤ − س)/١٠ : س ∈ [١، ٣]
          ١/١٠ : س ∈]٣، ٩]

لاحظ أنه: ل(|س| > ٩) = ل(∅) = صفر

ل(س < ٢) = ل(١ ≤ س < ٢) = ½[د(٢) + د(١)][٢ − ١] = ½[٢/١٠ + ٣/١٠]
= ½ × ٥/١٠ = ¼

ل(|س−١| ≤ ٢) = ل(−١ ≤ س ≤ ٢) = ل(−١ ≤ س ≤ ١) + ل(١ ≤ س ≤ ٢)
= صفر + ¼ = ¼

ل(|س−١| > ٢) = ل(س > ٢ أو س < −١) = ل(٢ < س ≤ ٩) + صفر = ١ − ¼ = ٣/٤

(٩) إذا كان س متغير عشوائي متصل ودالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { |س + ٤| : −٥ ≤ س ≤ −٣
          صفر : فيما عدا ذلك

احسب ما أمكنك كلاً من (i) ل(−٥ < س ≤ −٤) (ii) ل(س ≥ −٦) (iii) ل(س < −٩/٢) (iv) ل(|س| < ٤)

الجواب {½ ، ١ ، ٣/٨ ، ½} حاول بنفسك

(١٠) إذا كان س متغير عشوائي متصل دالة كثافة الاحتمال له هي

د(س) = { (١/٢٦)س + أ : −٣ ≤ س ≤ ٣
          صفر : فيما عدا ذلك

(i) احسب قيمة أ (ii) احسب ل(س > ٠) (iii) ل(|س| ≤ ٢) (iv) ل(|س − ٢| ≤ ١)

الجواب {أ = ١/٦ ، ٥/٨ ، ٢/٣ ، ٤/٩} حاول بنفسك

لاحظ أن |س − ٢| ≤ ١ ∴ −١ ≤ س − ٢ ≤ ١ ∴ ١ ≤ س ≤ ٣

13

الوحدة ٤ التوزيع الطبيعي (الاعتدالي)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الأقواس في كل مما يأتي

(١) الصيغة الرياضية لدالة كثافة المتغير العشوائي الطبيعي تعتمد على معلميه هما ...... { μ، ن أو س، ع أو μ، σ }

(٢) المنحنى الطبيعي له قمة واحدة وطرفاه يمتدان إلى ...... { صفر، الواحد الصحيح، النهايه، مالانهاية }

(٣) محور تماثل المنحنى الطبيعي هو المستقيم ...... { ص = σ، س = σ، س = ع، س = μ }

(٤) مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي وفوق محور السينات تساوى ...... { صفر، -١، ∞، ١ }

(٥) المنحنى الطبيعي المعياري وسطه الحسابي = ... { ١، σ، ن، صفر }

(٦) التوزيع الطبيعي يعبر عن أي ظاهرة ...... { علميه، صناعيه، طبيعيه }

(٧) يكون المنحنى الممثل للمتغير العشوائي الطبيعي لمعظم الظواهر الطبيعية على شكل ...... { خط مستقيم، قطع ناقص، قطع مكافئ، شكل الجرس }

(٨) ل (ص $\leq \mu$) = ... { صفر، ١، -١، ٠.٥ } حيث ص متغير عشوائي طبيعي معياري

(٩) ل (ص $\geq$ ٢μ) = ... { ٠، ٢، -٢، ٠.٥ }

(١٠) ل (|ص| $\geq$ ٠) = ... { ∞، صفر، -١، ١ }

(١١) إذا كانت قيم المتغير العشوائي س كلها موجبة فإنه وسطه الحسابي ...... { سالب، سالب أو موجب، صفر، موجب }

(١٢) المتغير الطبيعي س يتحول إلى متغير طبيعي معياري ص باستخدام القاعدة ...... { ص = $\frac{\mu}{\sigma}$ أو س = $\frac{ص - \mu}{\sigma}$، ص = $\frac{س - \mu}{\sigma}$ }

(١٣) إذا كانت قيم المتغير العشوائي س كلها سالبة فإنه انحرافه المعياري ...... { سالب، موجب أو سالب، صفر، موجب }

(١٤) إذا كان توقع س يساوي ٥ فإنه من الضروري أن تكون إحدى قيم س ...... { صفر، ٥، ∞، خلاف ذلك }

(١٥) في المتغير الطبيعي إذا كان المطلوب عدد عناصر حدث ما فإنه العدد المطلوب = احتمال وقوع الحدث × ...... { المتوسط، الانحراف المعياري، ١٠٠، عدد عناصر ف }

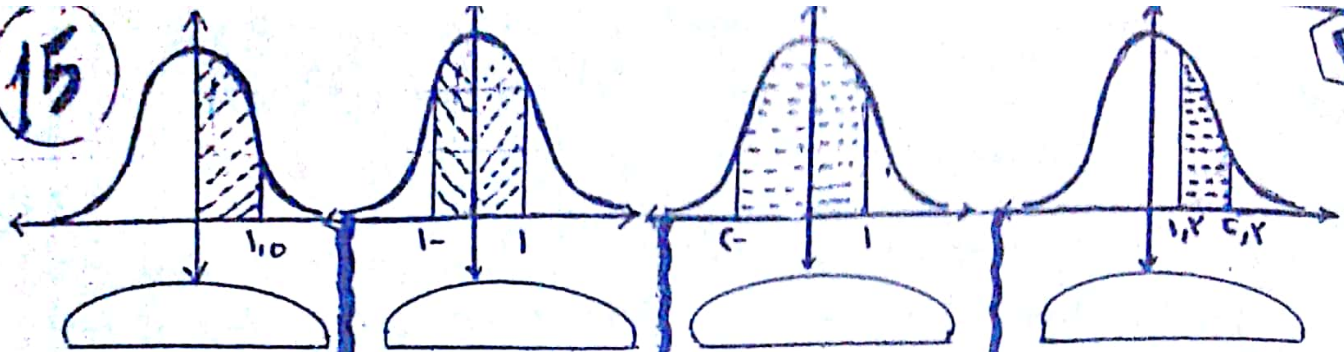
Scanned by CamScanner

جدول المساحات أسفل المنحنى الطبيعى

ى	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٠٠٠٠	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٨٠	٠,٠١٢٠	٠,٠١٦٠	٠,٠١٩٩	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٧٩	٠,٠٣١٩	٠,٠٣٦
٠,١	٠,٠٣٩٨	٠,٠٤٣٨	٠,٠٤٧٨	٠,٠٥١٧	٠,٠٥٥٧	٠,٠٥٩٦	٠,٠٦٣٦	٠,٠٦٧٥	٠,٠٧١٤	٠,٠٧٥٣
٠,٢	٠,٠٧٩٣	٠,٠٨٣٢	٠,٠٨٧١	٠,٠٩١٠	٠,٠٩٤٨	٠,٠٩٨٧	٠,١٠٢٦	٠,١٠٦٤	٠,١١٠٣	٠,١١٤١
٠,٣	٠,١١٧٩	٠,١٢١٧	٠,١٢٥٥	٠,١٢٩٣	٠,١٣٣١	٠,١٣٦٨	٠,١٤٠٦	٠,١٤٤٣	٠,١٤٨٠	٠,١٥١٧
٠,٤	٠,١٥٥٤	٠,١٥٩١	٠,١٦٢٨	٠,١٦٦٤	٠,١٧٠٠	٠,١٧٣٦	٠,١٧٧٢	٠,١٨٠٨	٠,١٨٤٤	٠,١٨٧٩
٠,٥	٠,١٩١٥	٠,١٩٥٠	٠,١٩٨٥	٠,٢٠١٩	٠,٢٠٥٤	٠,٢٠٨٨	٠,٢١٢٣	٠,٢١٥٧	٠,٢١٦٠	٠,٢٢٢٤
٠,٦	٠,٢٢٥٩	٠,٢٢٩١	٠,٢٣٢٤	٠,٢٣٥٧	٠,٢٣٨٩	٠,٢٤٢٢	٠,٢٤٥٤	٠,٢٤٨٦	٠,٢٥١٧	٠,٢٥٤٩
٠,٧	٠,٢٥٨٠	٠,٢٦١١	٠,٢٦٤٢	٠,٢٦٧٣	٠,٢٧٠٤	٠,٢٧٣٤	٠,٢٧٦٤	٠,٢٧٩٤	٠,٢٨٢٣	٠,٢٨٥٢
٠,٨	٠,٢٨٨١	٠,٢٩١٠	٠,٢٩٣٩	٠,٢٩٦٧	٠,٢٩٩٥	٠,٣٠٢٣	٠,٣٠٥١	٠,٣٠٧٨	٠,٣١٠٦	٠,٣١٣٣
٠,٩	٠,٣١٥٩	٠,٣١٨٦	٠,٣٢١٢	٠,٣٢٣٨	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٨٩	٠,٣٣١٥	٠,٣٣٤٠	٠,٣٣٦٥	٠,٣٣٨٩
١,٠	٠,٣٤١٣	٠,٣٤٣٨	٠,٣٤٦١	٠,٣٤٨٥	٠,٣٥٠٨	٠,٣٥٣١	٠,٣٥٥٤	٠,٣٥٧٧	٠,٣٥٩٩	٠,٣٦٢١
١,١	٠,٣٦٤٣	٠,٣٦٦٥	٠,٣٦٨٦	٠,٣٧٠٨	٠,٣٧٢٩	٠,٣٧٤٩	٠,٣٧٧٠	٠,٣٧٩٠	٠,٣٨١٠	٠,٣٨٣٠
١,٢	٠,٣٨٤٩	٠,٣٨٦٩	٠,٣٨٨٨	٠,٣٩٠٧	٠,٣٩٢٥	٠,٣٩٤٤	٠,٣٩٦٢	٠,٣٩٨٠	٠,٣٩٩٧	٠,٤٠١٥
١,٣	٠,٤٠٣٢	٠,٤٠٤٩	٠,٤٠٦٦	٠,٤٠٨٢	٠,٤٠٩٩	٠,٤١١٥	٠,٤١٣١	٠,٤١٤٧	٠,٤١٦٢	٠,٤١٧٧
١,٤	٠,٤١٩٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤٢٢٢	٠,٤٢٣٦	٠,٤٢٥١	٠,٤٢٦٥	٠,٤٢٧٩	٠,٤٢٩٢	٠,٤٣٠٦	٠,٤٣٢
١,٥	٠,٤٣٣٢	٠,٤٣٤٥	٠,٤٣٥٧	٠,٤٣٧٠	٠,٤٣٨٢	٠,٤٣٩٤	٠,٤٤٠٦	٠,٤٤١٨	٠,٤٤٢٩	٠,٤٤٤
١,٦	٠,٤٤٥٢	٠,٤٤٦٣	٠,٤٤٧٤	٠,٤٤٨٤	٠,٤٤٩٥	٠,٤٥٠٥	٠,٤٥١٥	٠,٤٥٢٥	٠,٤٥٣٥	٠,٤٥٤٥
١,٧	٠,٤٥٥٤	٠,٤٥٦٤	٠,٤٥٧٣	٠,٤٥٨٢	٠,٤٥٩١	٠,٤٥٩٩	٠,٤٦٠٨	٠,٤٦١٦	٠,٤٦٢٥	٠,٤٦٣٣
١,٨	٠,٤٦٤١	٠,٤٦٤٩	٠,٤٦٥٦	٠,٤٦٦٤	٠,٤٦٧١	٠,٤٦٧٨	٠,٤٦٨٦	٠,٤٦٩٣	٠,٤٦٩٩	٠,٤٧٠٦
١,٩	٠,٤٧١٣	٠,٤٧١٩	٠,٤٧٢٦	٠,٤٧٣٢	٠,٤٧٣٨	٠,٤٧٤٤	٠,٤٧٥٠	٠,٤٧٥٦	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٦٧
٢,٠	٠,٤٧٧٢	٠,٤٧٧٨	٠,٤٧٨٣	٠,٤٧٨٨	٠,٤٧٩٣	٠,٤٧٩٨	٠,٤٨٠٣	٠,٤٨٠٨	٠,٤٨١٢	٠,٤٨١٧
٢,١	٠,٤٨٢١	٠,٤٨٢٦	٠,٤٨٣٠	٠,٤٨٣٤	٠,٤٨٣٨	٠,٤٨٤٢	٠,٤٨٤٦	٠,٤٨٥٠	٠,٤٨٥٤	٠,٤٨٥٧
٢,٢	٠,٤٨٦١	٠,٤٨٦٤	٠,٤٨٦٨	٠,٤٨٧١	٠,٤٨٧٥	٠,٤٨٧٨	٠,٤٨٨١	٠,٤٨٨٤	٠,٤٨٨٧	٠,٤٨٩٠
٢,٣	٠,٤٨٩٣	٠,٤٨٩٦	٠,٤٨٩٨	٠,٤٩٠١	٠,٤٩٠٤	٠,٤٩٠٦	٠,٤٩٠٩	٠,٤٩١١	٠,٤٩١٣	٠,٤٩١٦
٢,٤	٠,٤٩١٨	٠,٤٩٢٠	٠,٤٩٢٢	٠,٤٩٢٥	٠,٤٩٢٧	٠,٤٩٢٩	٠,٤٩٣١	٠,٤٩٣٢	٠,٤٩٣٤	٠,٤٩٣٦
٢,٥	٠,٤٩٣٨	٠,٤٩٤٠	٠,٤٩٤١	٠,٤٩٤٣	٠,٤٩٤٥	٠,٤٩٤٦	٠,٤٩٤٨	٠,٤٩٤٩	٠,٤٩٥١	٠,٤٩٥٢
٢,٦	٠,٤٩٥٣	٠,٤٩٥٥	٠,٤٩٥٦	٠,٤٩٥٧	٠,٤٩٥٩	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٦١	٠,٤٩٦٢	٠,٤٩٦٣	٠,٤٩٦٤
٢,٧	٠,٤٩٦٥	٠,٤٩٦٦	٠,٤٩٦٧	٠,٤٩٦٨	٠,٤٩٦٩	٠,٤٩٧٠	٠,٤٩٧١	٠,٤٩٧٢	٠,٤٩٧٣	٠,٤٩٧٤
٢,٨	٠,٤٩٧٤	٠,٤٩٧٥	٠,٤٩٧٦	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٧	٠,٤٩٧٨	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٧٩	٠,٤٩٨٠	٠,٤٩٨١
٢,٩	٠,٤٩٨١	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٢	٠,٤٩٨٣	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٤	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٥	٠,٤٩٨٦	٠,٤٩٨٦
٣,٠	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٧	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٨	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٨٩	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩٠
٣,١	٠,٤٩٩٠	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩١	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩١٢	٠,٤٩٩٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣
٣,٢	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٣	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٤	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥
٣,٣	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٥	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٦	٠,٤٩٩٧
٣,٤	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٧	٠,٤٩٩٨
٣,٥	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨	٠,٤٩٩٨

15

(٢)

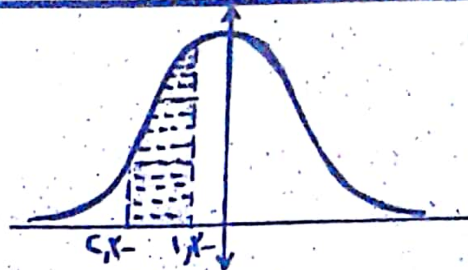


ل(١٫٢ ≤ ص ≤ ٢٫٢)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢٫٢) − ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٢)

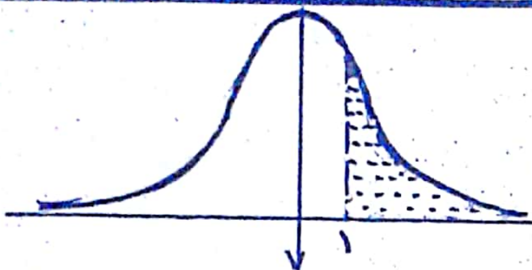
ل(−٢ ≤ ص ≤ ١)
= ل(−٢ ≤ ص ≤ ٠) + ل(٠ ≤ ص ≤ ١)

ل(−١ ≤ ص ≤ ١)
= ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ١)
= ٢ × ٠٫٣٤١٣

ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٥)



ل(−٢٫٢ ≤ ص ≤ −١٫٢) = ل(١٫٢ ≤ ص ≤ ٢٫٢)
= ل(٠ ≤ ص ≤ ٢٫٢) − ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٢)
= − =



ل(ص ≥ ١)
= ٠٫٥ − ل(٠ ≤ ص ≤ ١)
= ٠٫٥ − ٠٫٣٤١٣ = ٠٫١٥٨٧

(٢) إذا كان ص متغير عشوائي طبيعي معياري فأوجد قيمة ى التي تحقق

(أ) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫٤٤٠٦ (ب) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫٤٢٩٦

(جـ) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫٤٤ (د) ل(٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫٤٤٠٤

(هـ) ل(ى ≤ ص ≤ ٠) = ٠٫٤٥٢٥ (و) ل(ى ≤ ص ≤ ٢٫٢٢) = ٠٫٢٢٢٦

(ح) ل(ى ≤ ص ≤ ٢٫١٥) = ٠٫٩٢٦ (ط) ل(−١ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫٨٢٠٦

(ى) ل(−١ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫١٨٥٩ (ك) ل(−٠٫١٩٢ ≤ ص ≤ ى) = ٠٫١٧٥٩

١٫٥٦
١٫٥٥
١٫٥٥
١٫٥٦
−١٫٦٨
٠٫٧٥
−١٫٥٧
٢٫٢
−٠٫٤
٠٫٨٢

الحل

16

٤) إذا كان ص متغير عشوائي طبيعي معياري فأوجد قيمة ك التي تحقق كلاً من العلاقات الآتية.

أ) ل(ص ≥ ك) = ٠٫١٥٨٧

ب) ل(ص ≤ ك) = ٠٫٦٩٤

جـ) ل(ص ≥ ك) = ٠٫١٢٢

د) ل(ص ≤ ك) = ٠٫٦٩١٥

هـ) ل(-ك ≤ ص ≤ ك) = ٠٫٨٦٦٤

و) احسب ل(|ص| ≤ ٢٫١٩)

الحل حاول بنفسك (١) (١٫٤٨) (١٫١٦) (-٠٫٥٠) (١٫٥) (٠٫٢٨٦)

تدريب في اختبار احدى المواد التي يمتحن فيها طلبة احدى الكليات كانت الدرجات موزعة توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٧٥ درجة وتباينه ١٠٠ علماً بأنه (الدرجة النهائية للمادة ١٠٠) اوجد كلاً من

(i) الدرجات المعيارية للطالبين أ، ب حصلا على ٦٠، ٩٦ درجة على الترتيب

(ii) الدرجات التي حصلا عليها طالبان جـ، د إذا كانت درجاتهما المعيارية -٠٫٦، ١٫٢

الحل

∵ ص = (س - μ) ÷ σ ∴ س = σ ص + μ

الطالب	درجة الامتحان	الدرجة المعيارية	الطالب	الدرجة المعيارية	درجة الامتحان
أ	٦٠	$\frac{٦٠-٧٥}{١٠}$ = -١٫٥	جـ	-٠٫٦	١٠×-٠٫٦+٧٥=٦٩
ب	٩٦	______ =	د	١٫٢	

ع

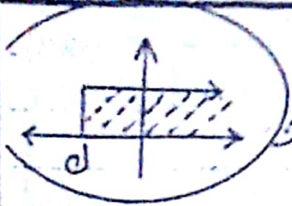
17

٥) س متغير عشوائي متوسطه = ١٠٠ وانحرافه المعياري = ٤
احسب قيمة م إذا كان ل(س > م) = ٠٫٥٦٢٦

الحل

ل(س > م) = ل(ص > $\frac{م - ١٠٠}{٤}$) = ٠٫٥٦٢٦

بوضع $\frac{م - ١٠٠}{٤}$ = ك ∴ ل(ص > ك) = ٠٫٥٦٢٦



٠٫٥ + ل(٠ > ص > -ك) = ٠٫٥٦٢٦

∴ ل(٠ > ص > -ك) = ٠٫٥٦٢٦ - ٠٫٥ = ٠٫٠٦٢٦ ∴ -ك = ٠٫١٦

∴ ك = -٠٫١٦ ∴ $\frac{م - ١٠٠}{٤}$ = -٠٫١٦ ∴ م = ١٠٠ - ٠٫٦٤

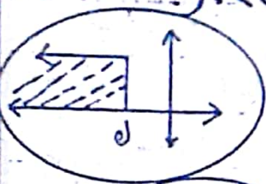
م = ٩٩٫٣٦

٦) إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً وسطه الحسابي μ وانحرافه المعياري σ = ٥ احسب قيمة μ التي تجعل ل(س ≥ ٢٥) = ٠٫٢٢٨

الحل

ل(س > ٢٥) = ٠٫٢٢٨ ∴ ل(ص > $\frac{٢٥ - μ}{٥}$) = ٠٫٢٢٨

بوضع $\frac{٢٥ - μ}{٥}$ = ك ∴ ل(ص > ك) = ٠٫٢٢٨



٠٫٥ - ل(٠ > ص > -ك) = ٠٫٢٢٨

ل(٠ > ص > -ك) = ٠٫٥ - ٠٫٢٢٨ = ٠٫٢٧٢

∴ -ك = ٢ ∴ ك = -٢ ∴ $\frac{٢٥ - μ}{٥}$ = -٢ ∴ μ = ٣٥

٧) إذا كان الدخل الشهري لعدد ١٠٠٠ أسرة هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي μ = ١٧٠ وانحرافه المعياري σ = ٢٠ جنيهاً.
أخذت أسرة عشوائياً من هذه الأسر فأوجد
(i) احتمال أن يكون دخلها ينحصر بين ١٦٠ جنيهاً، ٢٠٠ جنيهاً
(ii) عدد الأسر التي يزيد دخلها عن ١٥٠ جنيهاً

الحل

(i) ل(١٦٠ > س > ٢٠٠) = ل($\frac{١٦٠ - ١٧٠}{٢٠}$ > ص > $\frac{٢٠٠ - ١٧٠}{٢٠}$)

= ل(-٠٫٥ > ص > ١٫٥) = ل(٠ > ص > ٠٫٥) + ل(٠ > ص > ١٫٥)

= ٠٫١٩١٥ + ٠٫٤٣٣٢ = ٠٫٦٢٤٧

(ii) ل(س > ١٥٠) = ل(ص > $\frac{١٥٠ - ١٧٠}{٢٠}$) = ل(ص > -١)

= ٠٫٥ + ل(٠ > ص > ١) = ٠٫٥ + ٠٫٣٤١٣ = ٠٫٨٤١٣ النسبة المئوية ٨٤٫١٣٪

∴ عدد الأسر = ١٠٠٠ × ٠٫٨٤١٣ = ٨٤١٫٣ ≃ ٨٤١ أسرة

18

٨ إذا كان اوزان مجموعة من أشخاص هو متغير عشوائي طبيعي وسطه الحسابي μ = ١٦٠ رطل وانحراف معياري σ = ١٥ رطل فأوجد احتمال ان يختلف وزن اي شخص عن μ بما لا يزيد عن ٢٠ رطل

الحل الوزن يختلف عن μ يعني انه قد يكون بالزيادة أو النقصان
∴ لابد من استخدام فكرة المقياس |س − μ|

∴ الاحتمال المطلوب = ل(|س − μ| ≤ ٢٠) = ل(−٢٠ ≤ س − μ ≤ ٢٠)

= ل(−٢٠/١٥ ≤ ص ≤ ٢٠/١٥) = ل(−٤/٣ ≤ ص ≤ ٤/٣) = ٢ ل(٠ ≤ ص ≤ ١٫٣٣)

= ٢ × ٠٫٤٠٨٢ = ٠٫٨١٦٤

٩ بفرض أن انصاف الاقطار للحلزونات التي تنتجها احد المصانع موزعة توزيعا طبيعيا μ = ٣٫٢٥ ، σ = ٠٫٢٠ . ويعتبر الحلزون معيبا إذا كان نصف قطره يقل عن ٣٫٢٠ أو يزيد عن ٣٫٢٨ اوجد احتمال ان يكون الحلزون معيبا .

الحل واضح ان الحلزون يكون صالحا إذا كان طول نصف قطره ينحصر بين ٣٫٢٠ ، ٣٫٢٨ ∴ ل(الحلزون صالح) = ل(٣٫٢٠ ≤ س ≤ ٣٫٢٨)

= ل((٣٫٢٠ − ٣٫٢٥)/٠٫٢٠ ≤ ص ≤ (٣٫٢٨ − ٣٫٢٥)/٠٫٢٠) = ل(−٠٫٢٥ ≤ ص ≤ ٠٫١٥)

= ل(٠ ≤ ص ≤ ٠٫٢٥) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٠٫١٥) =

= ٠٫٠٩٨٧ + ٠٫٠٥٩٦ = ٠٫١٥٨٢

∴ يكون الحلزون معيبا = ل(صالح′) = ١ − ٠٫١٥٨٢ = ٠٫٨٤١٧

١٠ ينتج أحد المصانع اسطوانات اطوالها تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي μ = ٥٦ وانحرافه المعياري σ = ٢ . تكون الاسطوانة المنتجة مقبولة إذا كان طولها ينحصر بين ٥١ ، ٦٠ . أخذت عينة عشوائية من ١٠٠٠ اسطوانة. كم حجم المبيعات المتوقع بيعها إذا كان سعر الاسطوانة ١٠ جنيهات

الحل ل(٥١ ≤ س ≤ ٦٠) = ل((٥١ − ٥٦)/٢ ≤ ص ≤ (٦٠ − ٥٦)/٢)

= ل(−٢٫٥ ≤ ص ≤ ٢) = ل(٠ ≤ ص ≤ ٢٫٥) + ل(٠ ≤ ص ≤ ٢)

= ٠٫٤٩٣٨ + ٠٫٤٧٧٢ = ٠٫٩٧١

∴ عدد الاسطوانات المتوقع بيعها = ١٠٠٠ × ٠٫٩٧١ = ٩٧١ ∴ حجم المبيعات = ٩٧١٠ ج

(١٩)

١١ (ع ٢١ / ٢٠٢٠) مسابقة للأطوال نوع معين من النباتات (عند تمام النضج) في حقل ما وجد أن الأطوال تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط ٦٠ سم وكان طول أحد النباتات ٧٥ سم وطوله المعياري ٢ أوجد الانحراف المعياري وإذا كان الطول المعياري لنبات آخر من نفس النوع في نفس الحقل يساوي ٣.٠٠ فأوجد طوله الطبيعي.

الحل

∵ $ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$ ∴ $٢ = \frac{٧٥ - ٦٠}{\sigma}$ ∴ $\sigma = ٧,٥$

∵ $٣ = \frac{س - ٦٠}{٧,٥}$ ∴ $س = ٣ \times ٧,٥ + ٦٠ = ٨٢,٥$

١٢ (المنيا) وجد أن الأطوال نوع معين من النباتات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط ٥٠ وانحراف معياري σ إذا علم أن الأطوال ١٠.٥٦٪ من هذا النبات أقل من ٤٥ سم فأوجد التباين

الحل

ل(س < ٤٥) = ٠.١٠٥٦ ∴ ل(ص < $\frac{٤٥ - ٥٠}{\sigma}$) = ٠.١٠٥٦

ل(ص < $\frac{-٥}{\sigma}$) = ٠.١٠٥٦ ∴ ٠.٥ − ل(٠ < ص < $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠.١٠٥٦

∴ ل(٠ < ص < $\frac{٥}{\sigma}$) = ٠.٥ − ٠.١٠٥٦ = ٠.٣٩٤٤

∴ $\frac{٥}{\sigma} = ١,٢٥$ ∴ $\sigma = ٤$ ∴ التباين = $(٤)^٢ = ١٦$

١٣ إذا كانت درجات الطلاب في أحد الاختبارات تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه ٧٥ درجة وانحرافه المعياري ٨ درجات فإذا علم أن ١٠.٥٪ من الطلاب تحصل على تقدير ممتاز فما هي أدنى درجة يجب أن يحصل عليها الطالب ليحصل على تقدير ممتاز

الحل (٢٥)

نفرض أن أقل درجة هي k ∴ ل(س > k) = ٠.١٠٥٠

ل(ص > $\frac{k - ٧٥}{٨}$) = ٠.١٠٥ ∴ ٠.٥ − ل(٠ < ص < $\frac{k - ٧٥}{٨}$) = ٠.١٠٥

∴ ل(٠ < ص < $\frac{k - ٧٥}{٨}$) = ٠.٣٩٥ ∴ $\frac{k - ٧٥}{٨} = ١,٢٥$ ∴ k = ٨٥ درجة

١٤ إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ فأوجد ل($\mu - \frac{1}{4}\sigma$ < س < $\mu + \frac{1}{2}\sigma$) الجواب 0.2902

الحل

ل($\frac{\mu - \frac{1}{4}\sigma - \mu}{\sigma}$ < ص < $\frac{\mu + \frac{1}{2}\sigma - \mu}{\sigma}$) = ل($-\frac{1}{4}$ < ص < $\frac{1}{2}$) ثم نكمل (٢٥)

اختبار إحصاء

س١) إذا كان أ، ب حدثين مستقلين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(أ/ب) = ٠,٦ ، ل(ب) = ٠,٣ فإن ل(أ ∩ ب) = ...

أ) ٠,٩ ب) ٠,٣ ج) ٠,١٨ د) ٠,٢

س٢) إذا كان ف = {أ، ب، ج، د} حيث أ، ب، ج، د أحداث متنافية وكان ل(أ ∪ ب) = ٠,٦ ، أ ⊂ ب فإن ل(ج) = ...

أ) ٠,٢ ب) ٠,٣ ج) ٠,٤ د) ٠,٦

س٣) إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هي (ص − س = ٩) فإن الارتباط بين قيم س، قيم ص يكون ......

أ) منعدمًا ب) طرديًا تامًا ج) طرديًا د) عكسيًا

س٤) إذا كان المتوسط الحسابي لمتغير عشوائي ما يساوي ٤ وكان معامل الاختلاف له يساوي ٧٩٪ فإن الانحراف المعياري له = ...

أ) ١٠ ب) ١٠٠ ج) ٢١,٦ د) ٣,١٦

س٥) إذا كان ف هو فضاء العينة لتجربة عشوائية حيث ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}، أ = {٤، ٢، ٣، ١، ٨}، ب = {٢، ٥، ٦، ٧} فإن أ، ب حدثان ......

أ) متنافيان ب) بسيطان ج) مستقلان د) غير مستقلين

س٦) إذا كان ص متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا وكان ل(ص ≥ ك) = ٠,١٦٦٠ فإن ك = ...

أ) ١,٢٧ ب) ٠,٩٧ ج) ٢,١٢ د) ٢,٤

س٧) إذا كانت درجات الطلاب في أحد الامتحانات موزعة توزيعًا طبيعيًا بمتوسط قدره ٥٠ وانحراف معياري يساوي ٢ فإذا كانت الدرجة المعيارية لأحد الطلاب تساوي ٢ فإن درجته التي حصل عليها = ...

أ) ١٠٢ ب) ٩٨ ج) ٤٦ د) ٥٤

س٨) فصل دراسي به ٤٠ طالبًا، فإذا كان ٢٠ طالبًا منهم يدرسون اللغة الفرنسية، ١٥ طالبًا يدرسون اللغة الألمانية، ٥ طلاب يدرسون اللغتين معًا. فإذا اختير طالب عشوائيًا من هذا الفصل، احسب احتمال أن يكون هذا الطالب المختار ممن يدرسون:

أ) اللغة الألمانية إذا كان دارسًا للغة الفرنسية

ب) اللغة الفرنسية إذا كان دارسًا للغة الألمانية

جـ) إحدى اللغتين على الأقل

س٩) إذا كان مج س = ٤٨، مج ص = ٤٥، مج س ص = ٢٢٠، مج س² = ٢٠٩، مج ص² = ٣٠٣، ن = ١٠ أوجد

أ) معامل الارتباط الخطي بين المتغيرين س، ص وحدد نوعه

ب) معادلة خط انحدار ص على س

س١٠) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي د حيث

د(س) = { $\frac{1}{24}$ (س + ك) عندما ١ ≤ س ≤ ٥ ؛ صفر فيما عدا ذلك

أولًا: أوجد قيمة ك   ثانيًا: أوجد ل(٢ ≤ س ≤ ٤)

س١١) الجدول التالي يبين تقديرات ستة طلاب في مادتي الرياضيات والفيزياء:

تقديرات الفيزياء (س)	مقبول	جيد	جيد جدًا	ممتاز	جيد	ضعيف
تقديرات الرياضيات (ص)	مقبول	جيد جدًا	جيد	جيد جدًا	ضعيف	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص مبينًا نوعه

س١٢) س متغير عشوائي متقطع مداه {٠، ١، ٢، ٣، ٤} وكان ل(س = ٠) = $\frac{1}{16}$، ل(س = ١) = $\frac{1}{4}$، ل(س = ٣) = $\frac{1}{4}$، ل(س = ٤) = $\frac{1}{16}$ أوجد ل(س = ٢)،
الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير س

س١٣) إذا كان س متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا متوسطه ٣٢ وتباينه ١٦ فأوجد

أ) ل(س ≤ ٢٥)   ب) ل(٢٨ ≤ س ≤ ٣٠)

حل اختبار الإحصاء

١) ل(أ | ب) = ل(أ ∩ ب) / ل(ب) = ... ∴ ل(أ ∩ ب) = ٠,١٨

٢) ∵ أ ، ب حادثان متنافيان ، أ ⊂ ب ... ∴ ل(أ ∪ ب) = ...

∴ ل(ب) = ... ∴ ل(أ) = ٠,٤ [illegible]

٣) ∵ القيمة ... ∴ معامل الارتباط (طردي تام)

٤) ∵ معامل الاختلاف = ع / س̄ × ١٠٠ ∴ ٧٩٪ = ع / ٤ × ١٠٠ ∴ ع = ٣,١٦

٥) الحادثان غير مستقلين

٦) ∵ ل(ص < ك) = ٠,١٦٦ ∴ ل(ص < ك) = ٠,٤٢٢٠ ∴ ك = ٩٧

٧) ∵ ع = (س − س̄) / ع ∴ ٢ = (س − ٥٠) / ٢ ∴ س = ٥٤

٨) نفرض أن أ حدث إصابة الشخص بالقلق الشديد ∴ ل(أ) = ٢٠/٤٠ ، ب إصابته بالقلق الخفيف ل(ب) = ١٥/٤٠ ، ل(أ ∩ ب) = ٥/٤٠

(أ) احتمال أن يصاب بالقلق الخفيف إذا كان مصاباً بالقلق الشديد = ل(ب | أ) = ل(أ ∩ ب) / ل(أ) = ٥/٢٠ = ١/٤

ب) احتمال أن يكون مصاباً بالقلق الشديد إذا كان مصاباً بالقلق الخفيف ل(أ | ب) = ل(أ ∩ ب) / ل(ب) = ٥/١٥ = ١/٣

جـ) احتمال الإصابة بأحدهما على الأقل هو ل(أ ∪ ب)

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٢٠/٤٠ + ١٥/٤٠ − ٥/٤٠ = ٣/٤

④ إذا كان $ل(أ') = ٠.٤$ ، $ل(ب) = ٠.٥$ ، $ل(أ \cup ب) = ٠.٨$
أوجد $ل(أ | ب')$

الحل
أ) $ل(أ) = ١ - ل(أ') = ١ - ٠.٤ = ٠.٦$
$ل(أ \cap ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cup ب)$
$ل(أ \cap ب) = ٠.٦ + ٠.٥ - ٠.٨ = ٠.٣$

$$ل(أ | ب') = \frac{ل(أ \cap ب')}{ل(ب')} = \frac{ل(أ - ب)}{١ - ل(ب)} = \frac{ل(أ) - ل(أ \cap ب)}{١ - ٠.٥}$$

$$= \frac{٠.٦ - ٠.٣}{٠.٥} = \boxed{\frac{٣}{٥}}$$

---

⑤ ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة احسب احتمال أن يكون العدد الظاهر أولياً بشرط أن يكون العدد الظاهر فردياً

الحل
نفرض أن أ هو احتمال أن يكون العدد الظاهر أولياً $ل(أ) = \frac{٣}{٦}$
" " ب " " " " " فردياً $ل(ب) = \frac{٣}{٦}$
$ل(أ \cap ب) = \frac{٢}{٦}$

$$\therefore ل(أ | ب) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(ب)} = \frac{\frac{٢}{٦}}{\frac{٣}{٦}} = \boxed{\frac{٢}{٣}}$$

---

⑥ إذا كان $ل(ب | أ) = \frac{٢}{٣}$ ، $ل(ب | أ') = \frac{٤}{٧}$ ، $ل(أ) = \frac{٣}{٥}$

أوجد أ) $ل(أ \cap ب)$ ب) $ل(أ \cup ب)$

الحل
أ) $\because ل(ب | أ) = \frac{ل(أ \cap ب)}{ل(أ)} = \frac{٢}{٣} \Leftarrow \frac{٢}{٣} = \frac{ل(أ \cap ب)}{\frac{٣}{٥}}$

$\therefore ل(أ \cap ب) = \boxed{\frac{٢}{٥}}$

ب) $ل(ب | أ') = \frac{٤}{٧} \Leftarrow \frac{ل(ب \cap أ')}{ل(أ')} = \frac{٤}{٧} \Leftarrow \frac{ل(ب) - ل(أ \cap ب)}{١ - ل(أ)} = \frac{٤}{٧}$

$\therefore \frac{ل(ب) - \frac{٢}{٥}}{١ - \frac{٣}{٥}} = \frac{٤}{٧} \Leftarrow \frac{ل(ب) - \frac{٢}{٥}}{\frac{٢}{٥}} = \frac{٤}{٧} \quad \therefore ل(ب) = \boxed{\frac{٢٢}{٣٥}}$

$\therefore ل(أ \cup ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ \cap ب) = \frac{٣}{٥} + \frac{٢٢}{٣٥} - \frac{٢}{٥} = \boxed{\frac{٢٩}{٣٥}}$

(٩) أولاً: ر = (ن مج س ص − مج س مج ص) / ($\sqrt{ن\ مج\ س^2 - (مج\ س)^2}$ × $\sqrt{ن\ مج\ ص^2 - (مج\ ص)^2}$)

ر = (١٠ × ٣٢٠ − ٤٨ × ٤٥) / ($\sqrt{١٠ × ٢٥٩ - (٤٨)^2}$ × $\sqrt{١٠ × ٢٠٣ - (٤٥)^2}$) = ٠٫٩١

ارتباط طردي

ثانياً: معادلة خط انحدار ص على س هي ص^ = أ + ب س

ب = (ن مج س ص − مج س مج ص) / (ن مج س² − (مج س)²) = (١٠ × ٣٢٠ − ٤٨ × ٤٥) / (١٠ × ٢٥٩ − (٤٨)²) = ٣٫٠٨٨٧

أ = (مج ص − ب مج س) / ن = (٤٥ − ٣٫٠٨٨٧ × ٤٨) / ١٠ = −٢٫٨١٦

∴ معادلة خط انحدار ص على س هي ص^ = −٢٫٨١٦ + ٣٫٠٨٨٧ س

---

(١٠) أولاً: ل (١ ≥ س ≥ ٥) = ١ ∴ ½ [د(١) + د(٥)] × ٤ = ١

∴ ½ [(ك + ١)/٢٤ + (٥ + ك)/٢٤] × ٤ = ١ ∴ ك = ٣

ثانياً: ل (٢ ≥ س ≥ ٤) = ½ [د(٢) + د(٤)] × ٢ = ٥/٢٤ + ٧/٢٤ = ½

---

(١١)

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	ف²
مقبول	مقبول	٢	٢٫٥	−٠٫٥	٠٫٢٥
جيد	جيد جداً	٣٫٥	٤٫٥	−١	١
جيد جداً	ممتاز	٥	٦	−١	١
ممتاز	جيد جداً	٦	٤٫٥	١٫٥	٢٫٢٥
جيد	ضعيف	٣٫٥	١	٢٫٥	٦٫٢٥
ضعيف	مقبول	١	٢٫٥	−١٫٥	٢٫٢٥
				المجموع	١٣

ر = ١ − (٦ مج ف²) / (ن(ن² − ١)) = ١ − (٦ × ١٣) / (٦(٣٦ − ١)) = ٠٫٦٢٩

نوع الارتباط طردي

(١٢) أولاً: ل(س = ٢) = ١ − (١/١٦ + ١/٤ + ١/٤ + ١/١٦) = ٣/٨

ثانياً: الوسط الحسابي = μ

= Σ [سر . د(سر)] = ٠ × ١/١٦ + ١ × ١/٤ + ٢ × ٣/٨ + ٣ × ١/٤ + ٤ × ١/١٦

∴ μ = ٢

التباين σ² = Σ سر² . د(سر) − μ² =

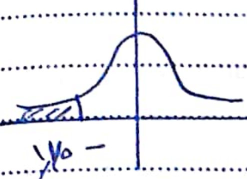
σ² = ٠ × ١/١٦ + ١ × ١/٤ + ٤ × ٣/٨ + ٩ × ١/٤ + ١٦ × ١/١٦ − (٢)²

σ² = ١ ∴ الانحراف المعياري σ = ١

---

(١٣) أ) ل(س < ٢٥) نحول إلى المعياري

ل(ص < (٢٥ − ٣٢)/٤) = ل(ص < −١,٧٥)



= ٠,٥ − ل(٠ < ص < ١,٧٥)

= ٠,٥ − ٠,٤٥٩٩ = ٠,٠٤٠١

ب) ل(٢٨ < س < ٣٠) نحول إلى المعياري

ل((٢٨ − ٣٢)/٤ < ص < (٣٠ − ٣٢)/٤) = ل(−١ < ص < ٠,٧٥)

= ل(٠ < ص < ١) + ل(٠ < ص < ٠,٧٥)

= ٠,٣٤١٣ + ٠,٢٧٣٤ = ٠,٦١٤٧

٨

* **التجربة العشوائية:** هي التجربة المعروف مقدماً جميع نواتجها دون التأكد أيها سيحدث بالفعل عند إجراء التجربة.

* **فضاء النواتج:** هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة عشوائية ويرمز له بالرمز (ف)

الاحتمال

* **الحدث:** هو أي مجموعة جزئية من فضاء النواتج.

أنواع الأحداث:

١) الحدث البسيط: يحتوي على عنصر واحد فقط. [يسمى احداثاً أولية]

٢) الحدث المؤكد: هو الحدث الذي لابد من وقوعه. [رمزه ف]

٣) الحدث المستحيل: هو الحدث الذي لا يمكن وقوعه. [رمزه ϕ]

الأحداث المتنافية

يقال لحدثين أ، ب أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر أو إذا كان $أ \cap ب = \phi$

ويقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا كانت متنافية مثنى مثنى [$أ \cap ب = \phi$ ، $ب \cap جـ = \phi$ ، ...]

مسلمات الاحتمال: إذا كان (ف) فضاء النواتج لتجربة عشوائية ما جميع نواتجها متساوية الإمكانات في الوقوع فإن:

لكل حدث أ يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال وقوع أ = ل(أ) يعرف كالآتي

$$ل(أ) = \frac{\text{عدد النواتج التي تؤدي إلى وقوع أ}}{\text{عدد جميع النواتج}} = \frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر ف}}$$

ويكون: * ل(أ) ∈ [٠ ، ١] * ل(ϕ) = صفر * ل(ف) = ١

١) ل(أ ∪ ب) =
- ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) إذا كان أ، ب غير متنافيان
- ل(أ) + ل(ب) إذا كان أ، ب متنافيان

٢) ل(أ') = ١ − ل(أ) كذلك ل(أ) = ١ − ل(أ')

٣) ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ل(أ ∩ ب') كذلك ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ل(ب ∩ أ')

٤) ل(أ' ∪ ب') = ل(أ ∩ ب)' = ١ − ل(أ ∩ ب) كذلك: ل(أ' ∩ ب') = ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب)

٥) ل(أ ∪ ب') = ل(أ) + ل(ب') − ل(أ ∩ ب') = ل(أ) + ١ − ل(ب) − [ل(أ) − ل(أ ∩ ب)]
= ل(أ) − ل(أ) + ١ + ل(أ ∩ ب) − ل(ب) = ١ + ل(أ ∩ ب) − ل(ب)

ملاحظات * إذا كان أ ⊂ ب فإن: أ ∩ ب = أ ∴ ل(أ ∩ ب) = ل(أ)
أ ∪ ب = ب ∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب)
أ − ب = ϕ ∴ ل(أ − ب) = ل(ϕ) = صفر

---

* العدد الزوجي: هو العدد الذي يقبل القسمة على ٢ مثل {٠ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ----}

* العدد الفردي: هو العدد الذي لا يقبل القسمة على ٢ مثل {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ---}

* العدد الأولي: هو العدد الذي يقبل القسمة على عددين مختلفين فقط [نفسه والواحد] مثل {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ----}

* الفرق بين عددين: بفرض أن أ > ب ∴ الفرق بينهما أ − ب وهو كمية موجبة
الفرق المطلق بين عددين: |أ − ب| أو |ب − أ| (٢ ، ٤) ، (٤ ، ٢)

تذكر أن ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(ب − أ) = ل(ب − أ)'

تذكر أن $أ - ب = \bar{ب} - \bar{أ}$ ، $ب - أ = \bar{أ} - \bar{ب}$

التعبير اللفظي	التعبير الرمزي	التمثيل بشكل فن
* وقوع أ أو وقوع ب * وقوع أحد الحدثين * وقوع أحدهما على الأقل	$أ \cup ب$	
* وقوع أ و وقوع ب * وقوع الحدثين معاً * وقوع كلا الحدثين	$أ \cap ب$	
عدم وقوع أ	$\bar{أ}$	
وقوع أ فقط * وقوع أ و عدم وقوع ب	$أ - ب = أ \cap \bar{ب}$	
* عدم وقوع أ و عدم وقوع ب * عدم وقوع أياً من الحدثين	$\bar{أ} \cap \bar{ب} = \overline{(أ \cup ب)}$	
* وقوع أحدهما على الأكثر * عدم وقوع الحدثين معاً	$\bar{أ} \cup \bar{ب} = \overline{(أ \cap ب)}$	
* وقوع أحد الحدثين فقط * وقوع أ فقط أو وقوع ب فقط	$(أ - ب) \cup (ب - أ) = (أ \cup ب) - (أ \cap ب)$	
وقوع ب أو عدم وقوع أ	$ب \cup \bar{أ} = \overline{(أ - ب)}$ $= 1 - ل(أ - ب)$	

تذكر أن $ل(أ \cup \bar{ب}) = 1 - ل(ب - أ)$

الاحتمال الشرطي: $ل(أ | ب) = ل(أ \cap ب) \div ل(ب)$ ، $ل(ب) \neq$ 0

احتمال وقوع أ بشرط وقوع ب

ملاحظات: $ل((أ_1 \cup أ_2) | ب) = ل(أ_1 | ب) + ل(أ_2 | ب)$

بشرط أن $ل(أ_1 \cap أ_2) = \phi$

* $ل(\bar{أ} | ب) = 1 - ل(أ | ب)$ ، $ل(أ \cap ب) = ل(أ | ب) \cdot ل(ب) = ل(ب | أ) \cdot ل(أ)$

الأحداث (1) المستقلة: إذا كان $ل(أ \cap ب) = ل(أ) \times ل(ب)$

(2) غير المستقلة إذا كان $ل(أ \cap ب) \neq ل(أ) \times ل(ب)$

(i) أ، ب مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الآخر

(ii) أ، ب غير مستقلين " " " يؤثر " "

عموماً $ل(أ | ب) \neq ل(ب | أ)$

المتغير العشوائي :

إذا كان ف فضاء نواتج لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن أى دالة س حيث س : ف ⟵ ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

أنواعه (المتغير العشوائي)

* (المتقطع) هو الذى مداه مجموعة قابلة للعدد [قابلة للعد] .
* المتصل : هو الذى مداه مجموعة غير قابلة للعدد [فترة] .

* التوزيع الاحتمالى :

إذا كان س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة $\{س_1 ، س_2 ، ... ، س_ن\}$ باحتمالات هى $\{د(س_1) ، ... ، د(س_ن)\}$ فإن

س	$س_1$	$س_2$	$س_3$	----	$س_ن$
د	$د(س_1)$	$د(س_2)$	$د(س_3)$	----	$د(س_ن)$

يُسمى بالتوزيع الاحتمالى للمتغير العشوائى س ويلاحظ أن د(س) تحقق ما يأتى

(1) $د(س) \geq 0$ (2) $\sum د(س) = 1$

① الوسط الحسابى (التوقع) $= \mu = \sum س \cdot د(س)$

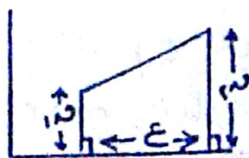
② التباين $= \sigma^2 = \sum س^2 \cdot د(س) - \mu^2$

③ الانحراف المعيارى $= \sigma = \sqrt{\sum س^2 \cdot د(س) - \mu^2}$

④ معامل الاختلاف $= \frac{\sigma}{\mu} \times 100$

س	د	س . د	$س^2$. د
⋮	⋮	⋮	⋮

* دالة الكثافة :



إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً فإن الدالة الحقيقية "د" تسمى بدالة كثافة المتغير العشوائى س إذا كان

ل ($ﺃ \leq س \leq ب$) = مساحة المنطقة تحت "د" ومحور السينات فى الفترة [ﺃ ، ب] لكل ﺃ ، ب ∈ ح

خواص دالة الكثافة : (1) منحنى "د" يقع بأكمله فوق محور السينات (2) المساحة تحت المنحنى ومحور السينات = الواحد

لحساب ل (ﺃ ≥ س ≥ ب) نتبع الاتى :- ① نحسب د(ﺃ) ثم د(ب) عن طريق التعويض فى الدالة المعطاة عن س ② نحسب (ب - ﺃ) ③ ل (ﺃ ≥ س ≥ ب) $= \frac{1}{2} [د(ب) + د(ﺃ)] [ب - ﺃ]$

ملاحظات ① إذا كانت الدالة معرفة بأكثر من قاعدة لابد من تقسيم المساحة حسب المطلوب

② إذا كانت قاعدة التعريف تحتوى على مجهول (ك) مثلا والمطلوب ايجاد قيمة (ك) نحسب المساحة خلال فترة التعريف ونساويها بالواحد .

قوانين بعض المساحات : * Δ = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة × الارتفاع

* المستطيل = الطول × العرض

* شبه المنحرف = $\left(\frac{ق_1 + ق_2}{2}\right) \times ع$

(11)

* المتغير الطبيعي المعياري رمزه ص ومنه μ = صفر ، σ = ١
* " " غير المعياري رمزه س وفيه μ ، σ خلاف ذلك

التوزيع الطبيعي

$$ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

(١) ل(ص ≥ ٠) = ٠٫٥
(٢) ل(ص ≤ ٠) = ٠٫٥
(٣) ل(ص ≤ ى) = ٠٫٥ − ل(٠ ≥ ص ≥ ى)
(٤) ل(ص ≥ ى) = ٠٫٥ + ل(٠ ≥ ص ≥ ى)
(٥) ل(ص ≥ −ى) = ٠٫٥ − ل(٠ ≥ ص ≥ ى)
(٦) ل(ص ≤ −ى) = ٠٫٥ + ل(٠ ≥ ص ≥ ى)
(٧) ل(ك ≥ ص ≥ ى) = ل(٠ ≥ ص ≥ ى) − ل(٠ ≥ ص ≥ ك)
(٨) ل(−ك ≥ ص ≥ −ى) = ل(٠ ≥ ص ≥ ك) − ل(٠ ≥ ص ≥ ى)
(٩) ل(−ك ≥ ص ≥ ى) = ل(٠ ≥ ص ≥ ى) + ل(٠ ≥ ص ≥ ك)
(١٠) ل(|ص| ≥ ى) = ل(−ى ≥ ص ≥ ى) = ٢ ل(٠ ≥ ص ≥ ى)

الارتباط

خواص معامل الارتباط
(١) ر ∈ [−١، ١] ويكون طردي ر ← ⊕ عكسي ر ← ⊖
(٢) *ر = ١ طردي تام * ر = −١ عكسي تام * ر = ٠ منعدم
(٣) قيمة ر لا تتغير إذا طرحنا أو جمعنا إلى عدد ثابت (اختياري)
س أو إلى جميع قيم س أو جميع قيم ص ويفضل أن يكون
$\bar{س} = \frac{مج\ س}{ن}$ = الوسط الحسابي ، $\bar{ص} = \frac{مج\ ص}{ن}$ = الوسط الحسابي

معامل ارتباط بيرسون

$$ر = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س \cdot مج\ ص}{\sqrt{ن\ مج\ س^2 - (مج\ س)^2} \cdot \sqrt{ن\ مج\ ص^2 - (مج\ ص)^2}}$$

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

$$ر = ١ - \frac{٦\ مج\ ف^2}{ن^3 - ن}$$

الانحدار

* معادلة انحدار ص على س : ص = أ س + ب
حيث أ معامل انحدار ص على س

$$أ = \frac{ن\ مج\ س\ ص - مج\ س \cdot مج\ ص}{ن\ مج\ س^2 - (مج\ س)^2}$$

$$ب = \frac{مج\ ص - أ \cdot مج\ س}{ن}$$

ملاحظات: تستخدم معادلة خط انحدار ص على س في
(i) التنبؤ بقيمة ص إذا علمت قيمة س
(ii) تحديد مقدار الخطأ والذي يتقدم من العلاقة
مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة التي تحققه معادلة الانحدار |

(١) طردي تام ، طردي قوي ، طردي متوسط ، طردي ضعيف ، منعدم (٠) ضعيف ، متوسط ، قوي ، عكسي تام (−١)
٠٫٩٨ ، ٠٫٧٥ ، ٠٫٥ ، ٠٫٢٥